

---

COMPUTER SCIENCE • VOL. 7 • 2005

---

ANDRZEJ ADAMEK\*, BARBARA GŁUT\*\*

## SYMBOLICZNA DEKOMPOZYCJA BLOKOWA W GENERATORZE SIATEK SZEŚCIOŚCIENNYCH

*Generowanie siatek sześciociennych dla obiektów trójwymiarowych bywa często wykonywane etapami. Pierwszy z nich polega na ogólnym podziale obiektu na bloki o prostych kształtach, które następnie wypełniane są elementami sześciociennymi. W niniejszej pracy prezentowana jest automatyczna metoda podziału na bloki obiektu o płaskich ścianach. Podział ten wykonywany jest na podstawie powierzchni, osi i węzłów środkowych obiektu. Główny nacisk w artykule położony jest na kreowanie topologii bloków. W tym celu zdefiniowana jest struktura grafowa OMG zawierająca niezbędne informacje o topologii powierzchni środkowych i topologii obiektu. Proste przekształcenia symboliczne wykonywane na OMG pozwalają uzyskać topologię bloków.*

**Słowa kluczowe:** generacja siatek sześciociennych, dekompozycja blokowa, transformacja środkowa, zorientowany graf Voronoi, zorientowany MAT graf

## SYMBOLIC BLOCK DECOMPOSITION IN HEXAHEDRAL MESH GENERATION

*Hexahedral mesh generation for three-dimensional solid objects is often done in stages. Usually an object is first subdivided into simple-shaped subregions, which then are filled with hexahedral finite elements. This article presents an automatic subdividing method of polyhedron with planar faces. The subdivision is based on medial surface, axes and nodes of a solid. The main emphasis is put on creating a topology of subregions. Obtaining such a topology involves defining a graph structure OMG which contains necessary information about medial surface topology and object topology, followed by simple symbolic processing on it.*

**Keywords:** hexahedral mesh generation, block decomposition, medial axis transform, oriented Voronoi graph, oriented MAT graph

### 1. Wstęp

Siatki sześciocienne są często wybierane do obliczeń metodą elementów skończonych. Dla wielu problemów obliczeniowych rezultaty otrzymywane z tych siatek są dokładniejsze [1].

---

\*Doktorant, Katedra Informatyki, Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków,  
[adamek@student.uci.agh.edu.pl](mailto:adamek@student.uci.agh.edu.pl)

\*\*Katedra Informatyki, Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków, [głut@agh.edu.pl](mailto:głut@agh.edu.pl)

Początkowo siatki sześciocienne były tworzone ręcznie, później półautomatycznie. Podejście takie było długotrwałe, i podatne na błędy, uniemożliwiało automatyzację całego procesu obliczeniowego, a dla bardziej skomplikowanych obiektów było praktycznie niemożliwe. Od wielu lat trwają prace nad w pełni automatycznym generatorem. W przeciwieństwie do dobrych właściwości numerycznych, generacja siatek sześciociennych, szczególnie w trzech wymiarach, jest trudna. Dobrze rozwinięte i sprawdzające się metody generacji siatek czworociennych nie mogą być stosowane do siatek sześciociennych [2]. Dobre efekty w generowaniu siatek sześciociennych dają metody dekomponujące obiekt na bloki, które są proste zarówno pod względem topologicznym, jak i geometrycznym. Bloki te następnie są wypełniane siatką sześciocienną o wymaganej gęstości. Główną trudnością jest tu wykonanie dekompozycji. Uznawanymi strukturami, które pozwalają analizować zarówno obiekty dwuwymiarowe jak również trójwymiarowe, są: *MAT* (*Medial Axis Transform*) opisana w rozdziale 3, oraz diagram Voronoi opisany w rozdziale 4. Szeroką klasę obiektów można rozłożyć na bloki przy wykorzystaniu elementów *MAT* takich, jak powierzchnie, osie i węzły środkowe [3], co jest skrótowo przedstawione w rozdziale 5. Jak pokazujemy w rozdziale 6, proces ten można wykonać w prosty sposób, zajmując się osobno topologią bloków i osobno geometrią, która jest ustalana na podstawie topologii. Najbardziej skomplikowaną topologię posiadają bloki, które odpowiadają węzłom środkowym. Tworzenie topologii tych bloków jest szczegółowo opisane również w rozdziale 6. Prezentowana metoda może być stosowana do obiektów trójwymiarowych o płaskich ścianach.

## 2. Definicje i oznaczenia

Przyjmujemy następujące oznaczenia:

- $T$  — dowolny obiekt trójwymiarowy,
- $Q$  — trójwymiarowy obiekt o ściankach płaskościennych,
- $crv$  — ciągła krzywa,
- Składowe obiektu  $Q$  to:
  - $V$  — wierzchołki,
  - $E$  — krawędzie,
  - $F$  — ściany
- $\mathbb{F}(Q)$  — zbiór ścian obiektu  $Q$ ,
- $\mathbb{E}(Q)$  — zbiór krawędzi obiektu  $Q$ ,
- $\mathbb{V}(Q)$  — zbiór wierzchołków obiektu  $Q$
- wartościowość wierzchołka określa liczba dochodzących krawędzi,
- $int(T)$  — wnętrze obszaru  $T$ ,
- $cl(T)$  — domknięcie obszaru  $T$ ,
- $\delta T$  — brzeg obszaru  $T$ ,
- $d(x, y)$  — odległość między punktami  $x$  i  $y$ ,
- $d(x, a)$  — odległość pomiędzy punktem  $x$  i składową  $a$ :  $d(x, a) = \inf_{y \in a} d(x, y)$ ,

- $d(a, b)$  — odległość pomiędzy składowymi  $d(a, b) = \inf_{x \in a, y \in b} d(x, y)$ ,
- $opn(crv)$  — krzywa  $crv$  nie zawierająca końców.

**Definicja 1 (closer, closerEq).** Definicja podana za [4]

Jeżeli  $a \cap b = \phi \vee a \subsetneq b$ :

$$closerEq(a, b) = \{x : d(x, a) \leq d(x, b)\}$$

$$closer(a, b) = int(closerEq(a, b))$$

w przeciwnym przypadku

$$closer(a, b) = \{x : d(x, a) < d(x, b)\}$$

$$closerEq(a, b) = cl(closer(a, b)).$$

Dodatkowo definiuje się

$$closer(a, a) = \phi$$

$$closerEq(a, a) = \mathbb{R}^3$$

### 3. Transformacja środkowa MAT

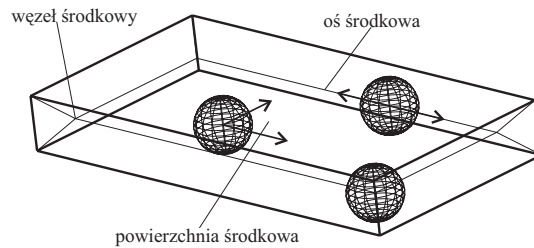
Jedną z podstawowych struktur pomocnych przy analizie obiektów geometrycznych jest transformacja środkowa. Struktura ta została wprowadzona pierwotnie przez Blum'a [5] do opisu biologicznych kształtów. Była później przedmiotem wielu badań i znalazła liczne zastosowania m.in. do wykrywania kolizji podczas ruchu robotów [6] czy rozpoznawania kształtów [7].

**Definicja 2 (MAT(T)).** Transformację środkową tworzą powierzchnie środkowe obiektu  $T$  (medial surface), oś środkowa obiektu  $T$  (medial axis), węzły środkowe obiektu  $T$  oraz funkcja odległości (radius function) określona na tych elementach.

**Definicja 3. Powierzchnię środkową** definiuje się jako zbiór punktów tworzonych przez środki kul zawartych całkowicie w  $T$  i posiadających dokładnie dwa punkty wspólne z  $\delta T$ . Kula spełniająca powyższe kryterium posiada dwa stopnie swobody (rys. 1).

**Definicja 4. Oś środkową** jest zbiór punktów tworzonych przez środki kul, które są zawarte całkowicie w  $T$ , oraz posiadają dokładnie jeden stopień swobody przy ustalonej na poziomie trzech lub więcej liczbie punktów wspólnych z  $\delta T$  (rys. 1).

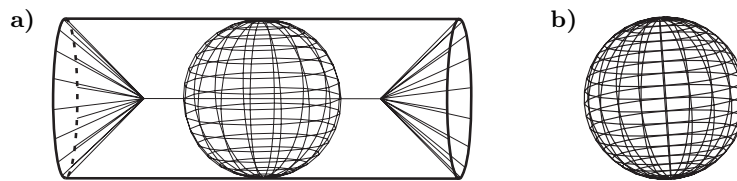
**Definicja 5.** Jeżeli kula zawarta jest całkowicie w  $T$ , posiada cztery lub więcej punktów wspólnych z  $\delta T$  oraz posiada zero stopni swobody, to jej środek tworzy **węzeł środkowy** (rys. 1).



Rys. 1. Struktura MAT wyznaczana przez środki kul wpisanych

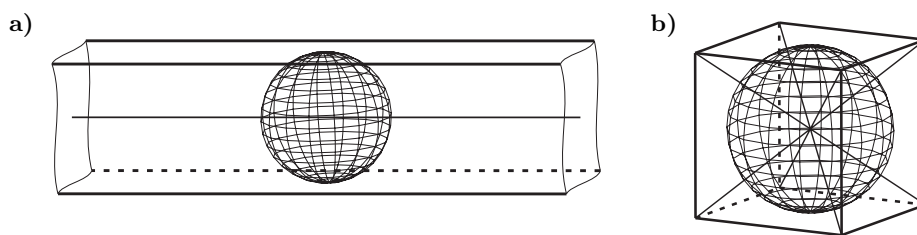
**Definicja 6.** *Funkcja odległości* jest określona dla każdego wężła, każdego punktu leżącego na osi i każdego punktu leżącego na powierzchni środkowej. Równa jest minimalnej odległości tego punktu do brzegu obiektu.

Liczba punktów styczności kuli z brzegiem zazwyczaj jest dyskretna, ale jest też możliwa sytuacja, w której kula posiada nieskończenie wiele punktów styczności. Przykładem jest m.in. walec, którego oś środkowa jest tworzona przez środki kul stycznych do brzegu na całym obwodzie (rys. 2a). *MAT* dla kuli składa się jedynie z wężła będącego środkiem kuli (rys. 2b).



**Rys. 2.** Walec i kula są przykładami obiektów mających ciągłą styczność z kulami wpisanymi  
Objaśnienia w tekście

W przypadku obiektów o płaskich ścianach kule są zawsze styczne do różnych elementów brzegu  $\delta T$ . Elementy te są nazywane zarządcami (*governors*). Powierzchnie środkowe posiadają dwóch zarządców. Osie środkowe zazwyczaj posiadają trzech zarządców i nazywane są wówczas regularnymi. Jeżeli oś posiada więcej niż trzech zarządców, to mówimy o osi zdegenerowanej. Częstość przypadkiem jest oś zdegenerowana posiadająca czterech zarządców (rys. 3a). W przypadku węzłów posiadają one czterech zarządców, ale i tu jest możliwa degeneracja, jeżeli zarządców jest więcej. Węzły będące końcami osi zdegenerowanych są również zdegenerowane. Istnieją również węzły zdegenerowane, od których odchodzą tylko osie regularne (rys. 3b).



**Rys. 3.** Degeneracja powierzchni środkowych  
Objaśnienia w tekście

*MAT* jest transformacją pozwalającą obniżyć wymiar geometrii (np. z 3-wymiarowej bryły otrzymujemy dwuwymiarowe powierzchnie). Na podstawie *MAT* można jednoznacznie odtworzyć obiekt wyjściowy [8].

## 4. Diagram Voronoi

Diagram Voronoi jest strukturą ściśle powiązaną z *MAT*. Uznawany jest za jedną z fundamentalnych struktur geometrii obliczeniowej [9, 10]. W wielu przypadkach jest możliwe uzyskanie jednej struktury z drugiej [11].

**Definicja 7 (Obszar Voronoi).** Niech  $\alpha$  oznacza zbiór składowych obiektu  $Q$ .

Obszar Voronoi  $R_\alpha = \bigcap_{a \in \alpha} cl\left(\bigcap_{b \in Q \setminus \alpha} closer(a, b)\right)$ .

**Definicja 8 (Zarządcą).** Jeżeli punkt  $x \in R_\alpha$ , to mówimy że  $x$  jest zarządzany przez składowe obiektu należące do  $\alpha$ .

**Definicja 9 (Diagram Voronoi).** Diagram Voronoi dla obiektu  $Q$  składa się z brzegów obszarów Voronoi dla poszczególnych składowych  $Q$ .

$$VD(Q) = \bigcup_{\alpha \in Q, |\alpha|=1} \delta R_\alpha.$$

**Stwierdzenie 1.** Punkt  $x \in VD(Q) \Rightarrow \exists_{\alpha, |\alpha|>1} x \in R_\alpha$ .

**Definicja 10 (Powierzchnia diagramu Voronoi).** Maksymalny spójny obszar  $s_\alpha \subset R_\alpha$  będący powierzchnią nazywamy powierzchnią  $VD(Q)$ , jeżeli  $\nexists_{\beta \supseteq \alpha} s_\alpha \subset R_\beta$ . Zbiór  $\alpha$  jest zbiorem zarządców powierzchni  $s_\alpha$ .

**Definicja 11 (Krawędź diagramu Voronoi).** Maksymalny spójny obszar  $a_\alpha \subset R_\alpha$  będący krzywą nazywamy krawędzią  $VD(Q)$ , jeżeli  $\nexists_{\beta \supseteq \alpha} a_\alpha \subset R_\beta$ . Zbiór  $\alpha$  jest zbiorem zarządców krawędzi  $a_\alpha$ .

**Definicja 12 (Węzeł diagramu Voronoi).** Maksymalny spójny obszar  $n_\alpha \subset R_\alpha$  będący punktem nazywamy węzłem  $VD(Q)$  jeżeli  $\nexists_{\beta \supseteq \alpha} n_\alpha \subset R_\beta$ . Zbiór  $\alpha$  jest zbiorem zarządców węzła  $n_\alpha$ .

Przyjmujemy następujące oznaczenia:

- $VD(Q).S$  — zbiór powierzchni diagramu Voronoi,
- $VD(Q).A$  — zbiór krawędzi diagramu Voronoi,
- $VD(Q).N$  — zbiór węzłów diagramu Voronoi.

**Stwierdzenie 2.** Dla obiektu  $Q$  zbiór zarządców powierzchni Voronoi składa się z dokładnie dwóch elementów. Zbiór zarządców krawędzi Voronoi składa się z przynajmniej trzech elementów. Zbiór zarządców węzła Voronoi składa się z przynajmniej czterech elementów.

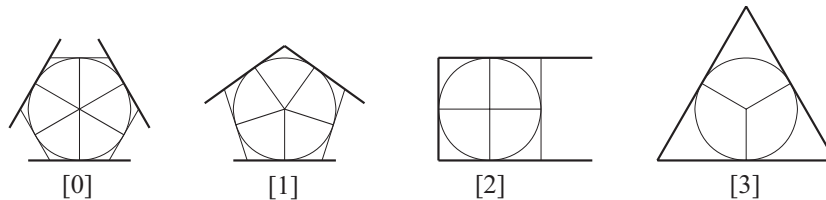
## 5. Dekompozycja obiektu na bloki przy wykorzystaniu *MAT*

W pracy [3] Armstrong i Aprice pokazują, jak można wykorzystać *MAT* do podziału trójwymiarowego obiektu na proste bloki. Obiekt, którym się zajmują, jest wypukły o wierzchołkach trójwartościowych i posiada niezdegenerowany *MAT*. Uzyskane bloki wykorzystywane są następnie do utworzenia siatki dla całego obiektu, poprzez stosowanie znanych metod strukturalnych dla każdego bloku z osobna [12]. Ze względu na to, że bloki posiadają wierzchołki trójwartościowe, możliwe jest zastosowanie dla każdego bloku prostej metody środkowego podziału (*midpoint subdivision technique*) [13].

Powierzchnie środkowe ograniczone są poprzez osie środkowe i ewentualnie elementy brzegu. Jeżeli powierzchnia środkowa ograniczona jest jedynie przez osie środkowe, to po obydwu stronach powierzchni położone są ściany obiektu, które zarządzają tą powierzchnią. Dla takich powierzchni można zastosować dwuwymiarowy generator siatek. Generator ten powinien również stosować metodę dekompozycji blokowej. Preferowany jest dwuwymiarowy generator oparty na *MAT*. Następnie poprzez wyciągnięcie otrzymuje się siatkę trójwymiarową rozpiętą pomiędzy ścianami obiektu zarządzającymi powierzchnią środkową. Siatki wygenerowane dla różnych powierzchni środkowych muszą się połączyć. Dzieje się to w miejscach odpowiadających osiom środkowym, czyli w miejscu przecięcia trzech powierzchni środkowych. Dla osi środkowych musi być utworzony blok, który dokonuje tego połączenia. Podobnie cztery osie środkowe spotykają się w węzłach, w których również musi być wygenerowana siatka zgodna z siatkami z dochodzącymi osiami. Powstaje więc dla każdego węzła blok o topologii zapewniającej zgodność z dochodzącymi osiami. Tym sposobem struktura *MAT*, szczególnie w węzłach i osiach środkowych, odzwierciedla skomplikowanie obiektu. Bloki tworzone dla tych elementów muszą zapewnić łatwe dopasowanie wzorów sąsiednich siatek.

### 5.1. Klasyfikacja osi

Każda oś ma trzy ściany zarządzające. Ściany te mogą być połączone lub nie. Są zatem możliwe cztery przypadki, gdyż kolejność ścian nie ma tu znaczenia. Przypadki te są oznaczane liczbą połączeń (rys. 4). Dla każdego przypadku generowany jest blok w postaci graniastosłupa, który biegnie wzdłuż osi i ma różną podstawę: od sześciokąta dla osi typu 0 do trójkąta dla osi typu 3.



**Rys. 4.** Cztery typy osi środkowych oraz odpowiadające im przekroje bloków utworzonych metodą środkowego podziału

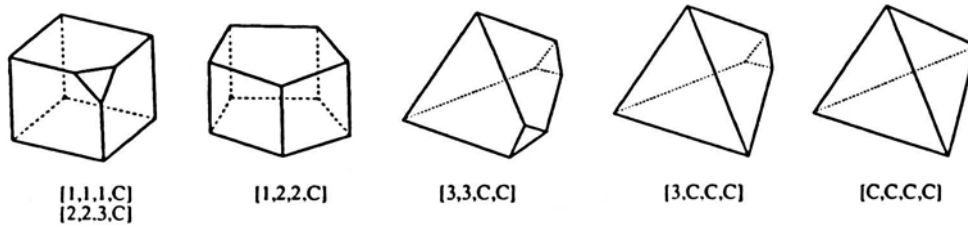
### 5.2. Klasyfikacja węzłów

Do każdego węzła dochodzą cztery osie. Przy istnieniu czterech typów osi, można by się spodziewać 256 typów węzłów. Jednak autorzy [3] pokazują, że w rzeczywistym obiekcie wiele zestawów osi jest niemożliwych. Pozostaje jedynie 11 możliwych typów węzłów oznaczanych sekwencją typów dochodzących osi. Bloki odpowiadające węzłom mają na ogół różną topologię (rys. 5), choć niektórym typom węzłów odpowiada ta sama topologia bloku.



Rys. 5. Przykładowe bloki odpowiadające węzłom (wg [3])

W blokach tych każdej osi odpowiada jedna ściana. Jednak są osie, dla których nie należy generować ścianki. Dzieje się tak w przypadkach, gdy jeden koniec osi należy do brzegu obiektu. Osie takie są nazywane osiami typu  $C$ . To powoduje powstanie kilku dodatkowych typów węzłów i kilku dodatkowych bloków (rys. 6).

Rys. 6. Przykładowe bloki odpowiadające węzłom z osiami typu  $C$  (wg [3])

Ostatecznie wyróżniamy 19 typów wierzchołków, którym odpowiada 13 prostych bloków.

### 5.3. Konstruowanie bloków

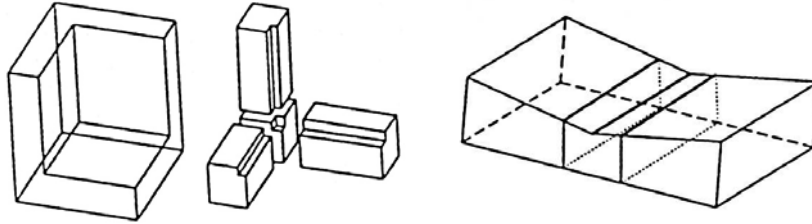
Autorzy [3] proponują, aby dekompozycje prowadzić w następującej kolejności. Najpierw wydzielić z obiektu bloki odpowiadające osiom środkowym, przy czym bloki te muszą się stykać krawędziami na końcach. Następnie wydzielić bloki odpowiadające węzłom. Pozostające części odpowiadają powierzchniom środkowym i powinny być dekomponowane na bloki po przejściu do dwuwymiarowej przestrzeni parametrycznej.

### 5.4. Degeneracja i obiekty wklęsłe

W pracy [14] Armstrong i Aprice zajmują się obiektami ze zdegenerowanym  $MAT$  oraz przypadkami obiektów wklęsłych.

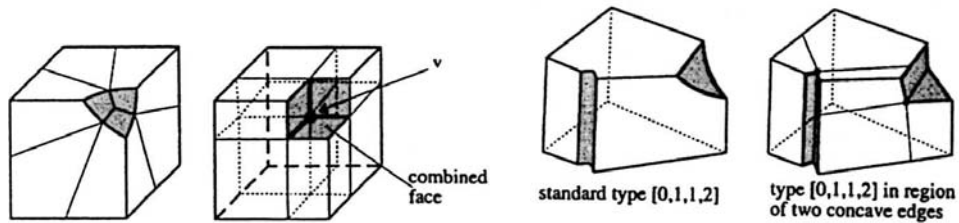
W przypadku osi zdegenerowanych blok należy formować poprzez zastosowanie cięć wzdłuż osi pomiędzy ścianami zarządzającymi. Bloki dla węzłów również otrzymuje się poprzez cięcia powierzchniami normalnymi dochodzącymi osi.

Dla obiektów wklęsłych autorzy poszukują elementów powierzchni środkowych, które mogą być pomocne do utworzenia odpowiednich bloków. Wyróżniają w *MAT* elementy, które nazywają punktami i krawędziami pośrednimi. Rozpatrują kilka konfiguracji, w których te elementy można odnaleźć. Następnie proponują podobny sposób wykonywania cięć, który prowadzi do podziału obiektu na bloki (rys. 7).



Rys. 7. Dekompozycja obiektów wklęsłych (wg [14])

Otrzymuje się w ten sposób bloki, które zawierają wklęsłe elementy (rys. 8). Generacja siatki wewnątrz takich bloków wymaga dodatkowej analizy. W proponowanej metodzie wykorzystywane są ściany połączone (*combined faces*).



Rys. 8. Przykładowe bloki odpowiadające wklęsłemu węzłowi środkowemu (wg [14])

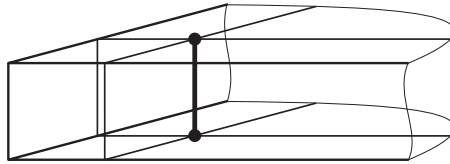
## 6. Dekompozycja symboliczna

Otrzymywanie bloków może odbywać się, jak to było wzmiankowane powyżej, poprzez dokonywanie cięć. Operacje tego typu na obiektach trójwymiarowych są jednak czasochłonne i skomplikowane. Często wiążą się to z wykonywaniem trudnych obliczeń geometrycznych, a następnie złożonych aktualizacji topologii. Wiele pośrednich wyników przed dokonaniem wszystkich cięć jest niepotrzebnych. W dalszej części zaproponowana zostanie metoda tworzenia bloków na podstawie zorientowanego *MAT* grafu. Graf ten nie zawiera żadnych informacji geometrycznych, które nie są potrzebne do uzyskania topologii bloków oraz ustalenia powiązań pomiędzy składowymi bloków i składowymi obiektu wyjściowego. Informacje geometryczne nie są również potrzebne do wykonania niektórych algorytmów takich, jak łączenie bloków, ustalanie liczby elementów biegnących wzdłuż każdej krawędzi bloku. Algorytmy te mogą, i ze wzglę-



du na wydajność powinny być uruchamiane przed ustaleniem geometrii. Powiązania pomiędzy składowymi bloków i składowymi obiektu wykorzystywane są na końcu do odtworzenia geometrii bloków.

Powierzchnie środkowe ograniczone są osiami, które z kolei stykają się w węzłach. Bloki odpowiadające tym osiom mają wspólne krawędzie oraz dwa wierzchołki (rys. 9). Elementy te są również wspólne zarówno z blokiem powiązanym z powierzchnią środkową, jak i z blokiem powiązanym z węzłem. We wszystkich tych blokach wspólne wierzchołki i krawędzie muszą mieć te same identyfikatory. Niezależne tworzenie bloków najpierw dla osi skutkuje koniecznością późniejszego wykrywania wspólnych elementów i uaktualniania ich identyfikatorów. Naturalną kolejnością jest więc utworzenie bloków odpowiadających węzłom, a następnie rozpięcie pomiędzy nimi bloków, które odpowiadają osiom. Jako ostatnie tworzone są bloki powierzchni środkowych.



Rys. 9. Wyróżniona krawędź jest wspólna dla bloków węzła, osi i powierzchni *MAT*

### 6.1. Zorientowany *MAT* graf (*OMG(Q)*)

Tworzenie bloków zawierających symboliczne informacje o obiekcie wyjściowym wymaga, aby do każdej osi *MAT* była dołączona informacja o zarządcach. Łatwo można pokazać, że etykietowanie osi zwykłym zbiorem zarządców nie jest wystarczające. Ścianki bloków, które odpowiadają węzłom, najczęściej są dwóch rodzajów. Pierwsze leżą na ścianach obiektu wyjściowego. Drugie są ściankami odpowiadającymi wychodzącej z węzła osi. Są położone wewnątrz obiektu i w wyidealizowanej sytuacji są prostopadłe do osi. Na podstawie jedynie zbioru zarządców dla każdej osi wychodzącej z węzła nie jesteśmy w stanie stwierdzić, które ścianki wewnętrzne są połączone. Kolejnym problemem jest konieczność kreowania bloków o prawidłowej orientacji. W wielu przypadkach orientacja jest możliwa do ustalenia po wykonaniu dodatkowych badań. Pomocne są tutaj osie typu *C*. Orientacja zarządców tej osi narzuca orientację bloku. Jeżeli krawędzie typu *C* nie występują, można wykonać inny test. Ściany zarządzające przecinają się ze sobą, tworząc krawędzie. Badając kolejność występowania tych krawędzi w sekwencji definiującej jedną ze ścian obiektu, możemy ustalić orientację bloku. Problem pojawia się, gdy brak jest krawędzi typu *C* i ściany zarządzające nie przecinają się. Przykładem może być tutaj węzeł typu [0000] według klasyfikacji podanej w [3]. Generowanie bloków przy wykorzystaniu *OMG* (*Oriented MAT Graph*) pozwoli obsłużyć ten jak i pozostałe przypadki w sposób jednolity.

**Definicja 13 (Zbiór incydentny z powierzchnią Voronoi  $I(s)$ ).** Niech  $s$  będzie powierzchnią Voronoi:

$$i(s) = \{x : x \in \mathbb{E}(Q) \cup \mathbb{V}(Q) \wedge x \subset s\}, \quad I(s) = \{x : x \in i(s) \wedge \nexists_{y \in i(s)} x \subsetneq y\}.$$

**Ograniczenie 1.** Dalsza część artykułu dotyczy obiektów, dla których  $|I(s)| \leq 1$ .

**Definicja 14. Elementem skojarzonym z powierzchnią Voronoi  $s$**  nazywamy jedyny element występujący w  $I(s)$  lub symbol  $\emptyset$ , jeżeli  $|I(s)| = 0$ .

**Definicja 15 (Zorientowany graf Voronoi  $OVG(Q)$ ).** Zorientowany graf Voronoi jest etykietowanym, skierowanym grafem. Definiowany jest jako szóstka  $OVG(Q) = (V, E, B_V, B_E, \Gamma, \gamma)$ , gdzie:

$V$  — jest zbiorem wierzchołków,

$E$  — jest zbiorem krawędzi w postaci par  $\{(x, y) : x, y \in V\}$ ,

$B_V$  — jest bijekcją z  $V$  w  $VD(Q).N$ ,

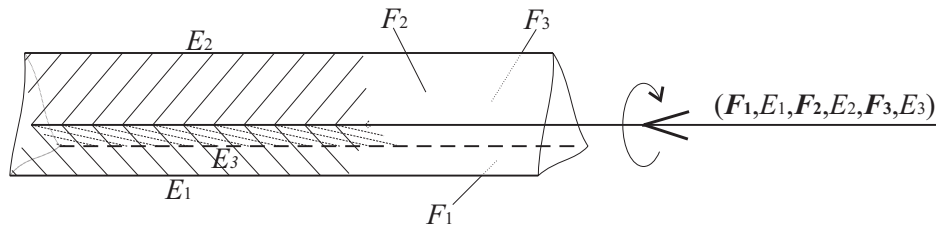
$B_E$  — jest bijekcją z  $E$  w  $VD(Q).A$ ,  $B_E : (x, y) \in E \rightarrow [B_V(x), B_V(y)] \in VD(Q).A$ ,

$\Gamma$  — jest zbiorem etykiet krawędzi  $\Gamma \subset \{\mathbb{F}(Q) \cup \mathbb{E}(Q) \cup \mathbb{V}(Q) \cup \emptyset\}^*$ ,

$\gamma$  — jest odwzorowaniem etykietującym krawędzie  $\gamma : E \rightarrow \Gamma$ .

**Odwzorowanie etykietujące  $\gamma$**

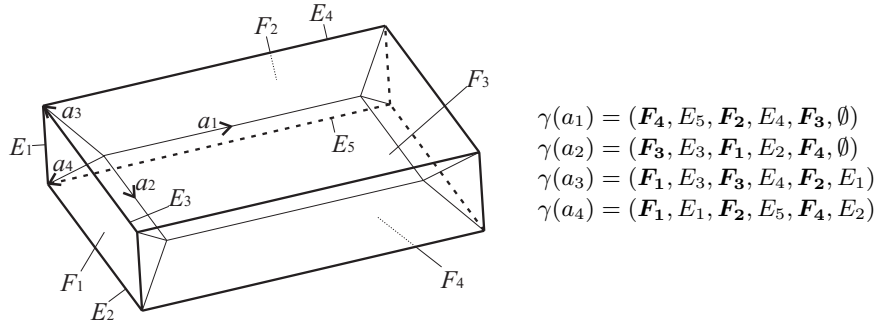
Skierowanie krawędzi w  $OVG(Q)$  może być przypadkowe, ma ono jednak wpływ na ich etykiety. Odwzorowanie  $\gamma$  etykietuje krawędzie cyklicznym ciągiem symboli, które reprezentują elementy obiektu. W ciągu występują na przemian symbole reprezentujące zarządców osi oraz symbole skojarzone z powierzchniami Voronoi incydentnymi z krawędzią. Jako pierwszy występuje symbol zarządcy. Kolejność symboli w ciągu odpowiada kolejności występowania elementów w rzeczywistym obiekcie  $Q$  oraz w odpowiadającym mu  $VD(Q)$ , jeżeli poruszamy się wokół krawędzi zgodnie z obrotem korkociągu (rys. 10). Dla poprawienia czytelności symbole reprezentujące zarządców będą pisane pogrubioną czcionką.



**Rys. 10.** Etykietowanie krawędzi grafu

<sup>1</sup> Jeżeli  $A$  jest zbiorem, to  $A^*$  oznacza zbiór wszystkich ciągów utworzonych z elementów  $A$

Jeżeli powierzchnia Voronoi  $s_i$  nie jest incydentna z żadną składową obiektu  $Q$ , to skojarzony jest z nią symbol pusty  $\emptyset$ , i taki symbol występuje w etykietach krawędzi incydentnych z  $s_i$  (rys. 11).



Rys. 11. Etykiety zawierające symbol pusty

Struktura  $MAT(Q)$  jest podzbiorem  $VD(Q)$  [11, 4]. Dlatego nie wszystkie wierzchołki i krawędzie z  $OVG(Q)$  znajdują się w następnym grafie.

**Definicja 16 (Zorientowany  $MAT$  graf  $OMG(Q)$ ).** Zorientowany  $MAT$  graf jest etykietowanym, skierowanym grafem.

Definiowany jest jako czwórka  $OMG(Q) = (V, E, \Gamma, \gamma)$  gdzie:

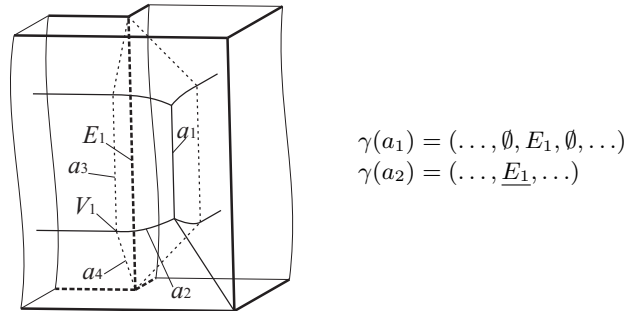
$V$  — jest zbiorem wierzchołków incydentnych z krawędziami z  $E$ , ( $V \subset OVG(Q).V$ ),

$E$  — jest zbiorem krawędzi  $\{e: e \in OVG(Q).E \wedge \text{opn}(OVG(Q).B_E(e)) \subset MAT(Q)\}$ ,

$\Gamma$  — jest zbiorem etykiet krawędzi  $\Gamma \subset \{\mathbb{F}(Q) \cup \mathbb{E}(Q) \cup \underline{\mathbb{E}}(Q) \cup \mathbb{V}(Q) \cup \emptyset\}^*$ ,

$\gamma$  — jest odwzorowaniem etykietującym krawędzie  $\gamma: E \rightarrow \Gamma$ .

Ponieważ niektóre krawędzie występujące dla obiektów wklęsłych w  $OVG(Q)$  nie występują w  $OMG(Q)$  (np.  $a_3, a_4$  na rys. 12), istnieją wierzchołki, które są incydentne jedynie z dwoma krawędziami (np.  $V_1$  na rys. 12). Wierzchołki takie nazywane są wierzchołkami łącznikowymi.



Rys. 12. Etykietowanie krawędzią zarządzającą z podkreśleniem

**Definicja 17 (Funkcja transformacji etykiety  $Tr_v(x)$ ).** Funkcja  $Tr_v(x)$  jest określona dla wierzchołków łącznikowych  $v$ . Argumentem funkcji mogą być symbole  $x$  występujące w etykietach krawędzi incydentnych z  $v$ . Wartością funkcji jest symbol  $x$ , jeżeli występuje w obu etykietach, bądź symbol występujący w etykiecie drugiej krawędzi, na który  $x$  zostaje zamienione przy przejściu przez wierzchołek łącznikowy.

Funkcja  $Tr$  może być w łatwy sposób wyznaczona z  $OVG(Q)$  lub z topologii obiektu  $Q$ .

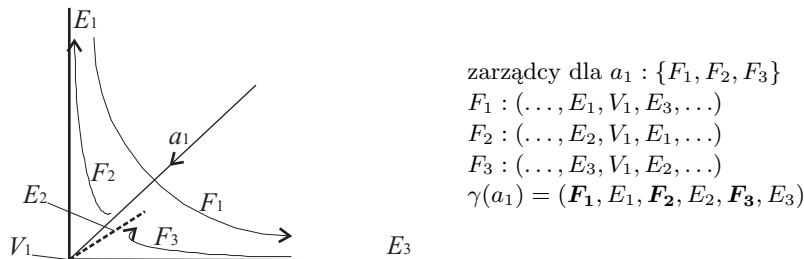
**Odwzorowanie etykietujące  $\gamma$  dla  $OMG(Q)$**  różni się od  $\gamma$  dla  $OVG(Q)$  możliwością występowania symboli reprezentujących krawędzie obiektu zapisywanych z podkreśleniem. Symbole takie mogą wystąpić dla krawędzi grafu, które są incydentne z wierzchołkiem łącznikowym  $v$ . Jeżeli  $E_i \in \mathbb{E}(Q)$  jest symbolem etykiety krawędzi i  $Tr_v(E_i) \in \mathbb{F}(Q)$ , to  $E_i$  w etykiecie występuje z podkreśleniem  $\underline{E_i}$  jak na rysunku 12 oś  $a_2$ . W przeciwnym razie zapisywany jest bez podkreślenia — oś  $a_1$  na rysunku 12.

### 6.1.1. Tworzenie zorientowanego MAT grafu

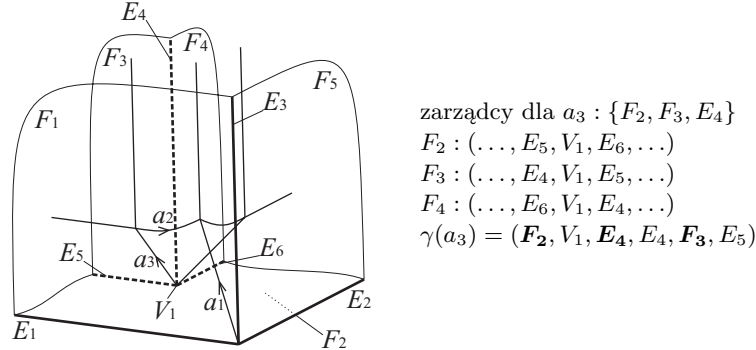
Zorientowany MAT graf jest uzyskiwany z  $VD(Q)$ . Dla każdej krawędzi diagramu znany jest zbiór zarządców. Krawędzie diagramu należy skierować i zaetykietować.

Zgodnie ze stwierdzeniem 2 powierzchnie Voronoi dochodzące do krawędzi posiadają dwóch zarządców. Liczba powierzchni dochodząca do krawędzi jest więc równa liczbie zarządców. Aby zaetykietować oś, należy ustalić pary zarządców, dla których istnieją powierzchnie Voronoi, oraz element skojarzony z każdą powierzchnią. Informacje te są wystarczające do utworzenia dwóch etykiet dla krawędzi, z czego jedna jest prawidłowa, a druga ma odwróconą kolejność symboli.

Najłatwiej można uzyskać etykietowanie dla osi, których koniec leży na brzegu obiektu. Jeżeli  $V$  jest wierzchołkiem należącym do obiektu i kończącym oś, to ciąg zarządców i elementów skojarzonych z powierzchniami Voronoi jest w prosty sposób ustalany na podstawie kolejności występowania krawędzi obiektu incydentnych z  $V$  w sekwencjach definiujących ściany obiektu zarządzające krawędzią Voronoi (rys. 13 i 14).



Rys. 13. Przykład etykietowania osi typu C



**Rys. 14.** Przykład etykietowania osi typu  $C$  dla obiektu wklęsłego

Pozostałe osie etykietowane są na podstawie kontaktu poprzez węzły z osiami już zaetykietowanymi.

**Stwierdzenie 3.** Niech  $a_i$  będzie krawędzią powierzchni Voronoi  $s$  zarządzanej przez  $G_k$  i  $G_l$ . Jeżeli oś  $a_j$  styka się z  $a_i$  oraz  $G_k$  i  $G_l$  są zarządcami  $a_j$ , to  $a_j$  jest krawędzią  $s$ .

**Stwierdzenie 4.** Niech osie  $a_i$  i  $a_j$  będą incydentne z wierzchołkiem  $v$ . Niech powierzchnia Voronoi  $s$  jest zarządzana przez  $G_k$  i  $G_l$ , posiada element skojarzony  $K$  i  $a_i$ ,  $a_j$  stanowią jej krawędzie. Jeżeli  $v$  jest końcem lub początkiem dla obu osi, to ciąg  $(G_k, K, G_l)$  występuje w etykiecie jednej osi, a ciąg  $(G_l, K, G_k)$  występuje w etykiecie drugiej osi. Jeżeli  $v$  jest początkiem dla jednej osi i końcem dla drugiej, to ciąg  $(G_k, K, G_l)$  lub  $(G_l, K, G_k)$  występuje w etykietach obu osi.

Informacja zawarta w etykietach osi typu  $C$  jest najczęściej niewystarczająca do zaetykietowania osi incydentnych. Osie te są zazwyczaj krawędziami powierzchni Voronoi, które posiadają element skojarzony  $\emptyset$ . Zarządcy tej powierzchni są znani i należy to uwzględnić podczas etykietowania. Przykładowo na rysunku 11 początkowo zaetykietowane są krawędzie  $a_3$  i  $a_4$ . Krawędź  $a_1$ , którą chcemy zaetykietować, posiada zarządców  $F_2, F_3, F_4$ . Z etykiety  $a_3$  otrzymujemy dla  $a_1$  podciąg  $(F_2, E_4, F_3)$ , a z etykiety  $a_4$  otrzymujemy podciąg  $(F_4, E_5, F_2)$ . Krawędź  $a_1$  jest krawędzią brzegową powierzchni Voronoi zarządzanej przez  $F_3, F_4$ . Uwzględniając to, otrzymujemy podciąg  $(F_3, \emptyset, F_4)$ . Ostatecznie  $\gamma(a_1) = (F_4, E_5, F_2, E_4, F_3, \emptyset)$ . W tym przypadku do zaetykietowania osi  $a_1$  wystarczyła informacja dostarczona przez etykiety osi incydentnych z daną poprzez jeden koniec. W przypadku obiektów wklęsłych często zachodzi potrzeba uwzględnienia etykiet osi incydentnych do obu końców etykietowanej osi. Na rysunku 14, aby zaetykietować oś  $a_2$ , należy uwzględnić etykiety osi  $a_1$  i  $a_3$ . Etykieta dla osi  $a_1$  jest równa  $\gamma(a_1) = (F_1, E_3, F_5, E_2, F_2, E_1)$ . Dla osi  $a_2$  otrzymujemy podciągi — z osi  $a_1$ :  $(F_1, E_1, F_2)$ , z osi  $a_3$ :  $(F_2, V_1, E_4)$ , i z powierzchni Voronoi zarządzanej przez  $F_1$  i  $E_4$  podciąg  $(E_4, \emptyset, F_1)$ . Ostatecznie otrzymujemy etykietowanie  $\gamma(a_2) = (F_1, E_1, F_2, V_1, E_4, \emptyset)$ .

Po zaetykietowaniu wszystkich osi należy uwzględnić funkcję  $Tr$  dla węzłów łącznikowych, tak aby odnaleźć symbole podkreślone.

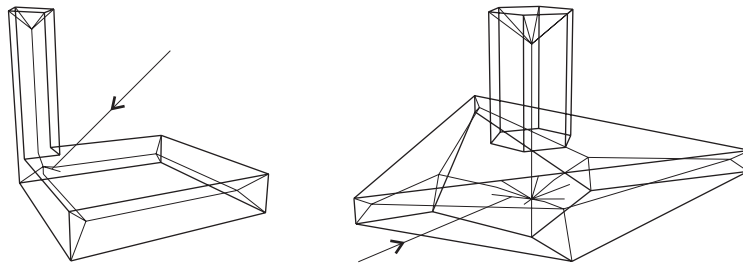
## 6.2. Topologia bloków odpowiadających węzłom

Dla każdego węzła *MAT*, do którego dochodzą przynajmniej cztery osie, tworzony jest blok. Bloki opisywane są zgodnie z formatem B-Rep. Zatem, aby utworzyć topologię obiektu, należy ustalić liczbę ścian, krawędzi oraz wierzchołków, następnie powiązać każdą krawędź z dwiema ścianami i dwoma wierzchołkami oraz opisać ścianę poprzez ciąg skierowanych krawędzi.

Jeżeli popatrzymy na bloki sklasyfikowane w [3], to zauważymy, że zawierają one ścianki odpowiadające osiom oraz ścianki leżące na ścianach obiektu. Każdy węzeł z klasyfikacji posiada cztery osie oraz czterech zarządców, co daje osiem ścianek dla bloku. Jeżeli węzeł zawiera osie typu *C*, to liczba ścianek jest pomniejszona o liczbę tych osi.

W przypadku obiektów wklęsłych, węzły zarządzane są przez krawędzie lub wierzchołki obiektu. Dla tych zarządców nie są tworzone ścianki, natomiast zarządcy ci muszą mieć odzwierciedlenie odpowiednio w krawędzi lub wierzchołku bloku, gdyż ostatecznie muszą stać się częścią siatki.

W *MAT* mogą również występować osie wiszące, których końce nie są ani węzłami środkowymi, ani nie należą do obiektu (rys. 15). Dzieje się tak, gdy zarządcami są dwie incydentne krawędzie obiektu i punkt styczności maksymalnej kuli zbliża się do punktu wspólnego krawędzi. Dla takich krawędzi nie powstają ścianki bloku. Jednak, jeżeli końce wiszące tych krawędzi połączone są pojedynczą krawędzią grafu Voronoi, wtedy pomiędzy tymi końcami będzie rozpięta ścianka bloku.

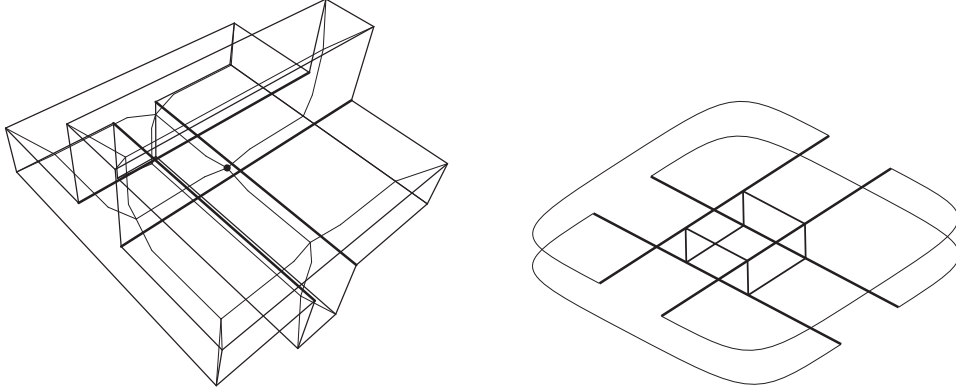


Rys. 15. Obiekty posiadające osie wiszące

Na rysunku 16 widoczny jest węzeł oparty jedynie na krawędziach wklęsłych<sup>2</sup> obiektu. Z węzła odchodzą cztery osie. Dla każdej osi powstanie ścianka, konieczne są również dwie uzupełniające ścianki: górna i dolna.

W dalszej części rozdziału osie wiszące będziemy oznaczać małą literą *h* z indeksem, pozostałe małą literą *a* z indeksem.

<sup>2</sup>Poprzez krawędź wklęsłą rozumiemy krawędź, dla której wewnętrzny kąt dwuścienny zawarty pomiędzy przyległymi do krawędzi ściankami jest większy od  $180^\circ$ . Poprzez wierzchołek wklęsły rozumiemy wierzchołek incydentny z krawędzią wklęsłą.



**Rys. 16.** Przykład bloku z ścianką uzupełniającą

Ścianki bloku klasyfikowane są następująco:

- $f_a$  — ścianki odpowiadające osiom,
- $f_F$  — ścianki wspólne z obiektem,
- $f_h$  — ścianki rozpięte pomiędzy osiami wiszącymi,
- $f_C$  — ścianki uzupełniające.

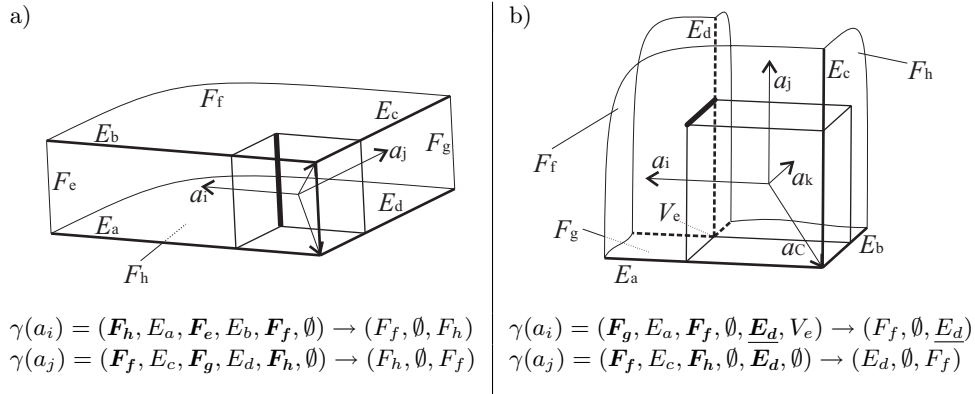
### 6.2.1. Krawędzie bloku

Blok tworzony dla węzła może zawierać różne typy krawędzi, które wykrywane są w odmienny sposób. Klasyfikowane są według typów ścianek które łączą:

- $e_{aa}$  — krawędzie leżące wewnątrz obiektu i łączące dwie ścianki typu  $f_a$ ,
- $e_{aa,E}$  — krawędzie leżące na wklęsłej krawędzi  $E$  obiektu i łączące dwie ścianki  $f_a$ ,
- $e_{ah}$  — krawędzie leżące wewnątrz obiektu i łączące ścianki typu  $f_a$  i  $f_h$ ,
- $e_{ah,E}$  — krawędzie leżące na krawędzi  $E$  obiektu i łączące ścianki typu  $f_a$  i  $f_h$ ,
- $e_{aC}$  — krawędzie leżące wewnątrz obiektu i łączące ścianki typu  $f_a$  i  $f_C$ ,
- $e_{aC,E}$  — krawędzie leżące na krawędzi  $E$  obiektu i łączące ścianki typu  $f_a$  i  $f_C$ ,
- $e_{hh}$  — krawędzie leżące wewnątrz obiektu i łączące dwie ścianki typu  $f_h$ ,
- $e_{aF}$  — krawędzie leżące na ścianie  $f_F$  obiektu i łączące ścianki typu  $f_a$  i  $f_F$ ,
- $e_{Fh}$  — krawędzie leżące na ścianie  $f_F$  obiektu i łączące ścianki typu  $f_F$  i  $f_h$ ,
- $e_{FF,E}$  — krawędzie leżące na wypukłej krawędzi obiektu i łączące dwie ścianki  $f_F$ .

**Wszystkie krawędzie leżące wewnątrz obiektu**, a więc krawędzie typu  $e_{aa}$ ,  $e_{ah}$ ,  $e_{aC}$ ,  $e_{hh}$  są reprezentowane w etykietach osi poprzez symbol  $\emptyset$ . Przed rozpoczęciem tworzenia topologii bloku dla węzła, należy osie incydentne skierować i przeetykietować tak, aby wychodziły z danego węzła.

**Krawędzie typu  $e_{aa}$ .** Można zauważyć, że dla sąsiednich ścianek bloku  $f_{a_i}$  i  $f_{a_j}$  symbole  $\emptyset$  występujące w etykietach osi, które odpowiadają tym ściankom, mają takich samych sąsiadów. Sąsiedzi w obu etykietach występują w odwrotnej kolejności (rys. 17a). W przypadku, gdy któryś z sąsiadów symbolu  $\emptyset$  jest symbolem krawędzi, to występuje w etykiecie jednej osi bez podkreślenia, a w etykiecie drugiej osi z podkreśleniem (rys. 17b). Spostrzeżenie to pozwala w łatwy sposób wykrywać krawędzie typu  $e_{aa}$ . Symbol  $\emptyset$  zostaje zastąpiony w obu etykietach przez symbol reprezentujący nową krawędź bloku  $e_{a_i, a_j}$ .



**Rys. 17.** Wykrywanie krawędzi łączących ścianki typu  $f_a$   
Objaśnienia w tekście

**Krawędzie typu  $e_{ah}$ ,  $e_{hh}$  jak również  $e_{aa}$**  są reprezentowane przez etykiety osi  $h_i$ . Ich wykrywanie również opiera się na dopasowaniu symboli  $\emptyset$  według wcześniej podanej zasady. Poszukiwanie wykonywane jest pomiędzy etykietami osi typu  $a$  i typu  $h$ . Na miejscu symbolu  $\emptyset$  w etykiecie osi  $h$  wpisywany jest symbol reprezentujący oś  $a$ , a w etykiecie osi  $a$  symbol osi  $h$ . Ostatecznie rodzaj krawędzi zależy od tego, jakimi symbolami zostały zastąpione oba symbole puste w etykiecie krawędzi.

**Krawędzie typu  $e_{aa, E}$**  odpowiadają elementom  $E_i$  zbioru krawędzi obiektu

$$E = \{E_i : \exists_{j \neq k} \underline{E_i} \in \gamma(a_j) \wedge \underline{E_i} \in \gamma(a_k)\}.$$

**Krawędzie typu  $e_{FF, E}$**  odpowiadają elementom zbioru, który jest różnicą zbioru symboli krawędzi niepodkreślonych i zbioru krawędzi podkreślonych.

**Krawędzie typu  $e_{aF}$**  odpowiadają elementom zbioru par  $(a_i, F_j)$

$$AF = \{(a_i, F_j) : F_j \in \gamma(a_i)\}.$$

**Krawędzie typu  $e_{ah, E}$  oraz  $e_{aC, E}$**  są wykrywane na podstawie symboli  $\underline{E}$ , po tym, jak wszystkie symbole  $\emptyset$  są już rozpoznane. Niech  $\underline{E_i}$  będzie takim symbolem reprezentującym krawędź obiektu. Jedną ze ścianek incydentnych z krawędzią jest ścianka  $f_{a_j} : E_i \in \gamma(a_j)$ . Dopasowanie sąsiadów dla symboli  $\underline{E_i}$  i  $E_i$  daje odpowiedź, jaka jest



druga ścianka incydentna do krawędzi. Jeżeli w etykiecie  $\gamma(a_j)$  występuje podciąg  $(\alpha, \underline{E_i}, \beta)$ , to w pozostałych etykietach poszukujemy ciągów odwrotnych  $(\beta, \underline{E_i}, x)$  lub  $(x, \underline{E_i}, \alpha)$ , gdzie  $x$  jest szukaną ścianką typu  $h$  lub  $C$ .

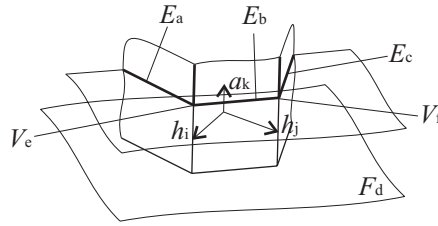
Wykrywanie krawędzi typu  $e_{aC}$  i  $e_{Fh}$  będzie opisane w dalszej części poświęconej topologii ścian.

### 6.2.2. Topologia ścian bloku

**Topologia ściany  $f_{a_i}$**  uzyskiwana jest bezpośrednio z etykiety osi  $\gamma(a_i)$ , jako ciąg krawędzi odpowiadających symbolom etykiety według zasady:

- symbol  $F_j$  reprezentuje krawędź  $e_{a_i F_j}$ ;
- symbol  $\underline{E_j}$  reprezentuje jedną z krawędzi:  $e_{a_i a, E_j}$ ,  $e_{a_i C, E_j}$  lub  $e_{a_i h, E_j}$ , w zależności od tego jak  $\underline{E_j}$  został rozpoznany;
- symbol  $E_j$  nie tworzy krawędzi;
- symbol  $V_j$  nie tworzy krawędzi;
- symbol  $\emptyset$  jest zastąpiony wykrytą krawędzią wewnętrzną, którą reprezentuje.

**Wykrywanie i tworzenie topologii ścian typu  $f_h$**  jest podobne do wykrywania krawędzi. Polega na dopasowaniu symboli  $\emptyset$  dla etykiet dwóch osi typu  $h$ . Symbole sąsiadujące z  $\emptyset$  w obu etykietach muszą być takie same i występować w odwrotnej kolejności. Dopasowane symbole  $\emptyset$  zostają zastąpione przez symbol reprezentujący wykrytą ściankę. Aby uzyskać topologię ściany, należy odnaleźć trójelementowe podciągi symbolów, w których środkowym elementem jest tworzona ścianka  $f_h$ . Symbol  $f_h$  w tych podciągach zastępowany jest krawędzią reprezentowaną przez etykietę krawędzi  $h$ , z której podciąg pochodzi.



**Rys. 18.** Tworzenie topologii ścianki typu  $f_H$

**Przykład 1.** Na rysunku 18 mamy następujące etykietowanie osi:

$$\begin{aligned}\gamma(h_i) &= (\underline{F_d}, \emptyset, \underline{E_b}, V_e, \underline{E_a}, \emptyset), \\ \gamma(h_j) &= (\underline{F_d}, \emptyset, \underline{E_c}, V_f, \underline{E_b}, \emptyset), \\ \gamma(a_k) &= (\dots, \underline{E_a}, V_e, \underline{E_b}, V_f, \underline{E_c}, \dots).\end{aligned}$$

Następujące podciągi etykiet osi  $h$  pozwalają wykryć ściankę  $f_{h_{i,j}}$ :

$$\begin{aligned}h_i &: (\underline{F_d}, \emptyset, \underline{E_b}), \\ h_j &: (\underline{E_b}, \emptyset, \underline{F_d}).\end{aligned}$$

Pozostałe dwa symbole  $\emptyset$  w podobnym postępowaniu zostaną rozpoznane jako ścianki typu  $f_h$  lub  $f_a$ . Tutaj zostaną zastąpione przez  $f_x$  i  $f_y$ . Stąd otrzymujemy następujące etykietowanie osi:

$$\begin{aligned} h_i &: (F_d, f_{h_{i,j}}, E_b, V_e, E_a, f_x), \\ h_j &: (F_d, f_y, E_c, V_f, E_b, f_{h_{i,j}}). \end{aligned}$$

Procedura odnajdywania krawędzi typu  $e_{aC,h}$  pozwala wykryć krawędź łączącą ścianki  $f_{h_{i,j}}$  i  $f_{a_k}$ :

$$E_b : e_{a_k h_{i,j}, E_b}.$$

Po rozpoznaniu wszystkich symboli  $\emptyset$  dla osi typu  $h$ , można zidentyfikować, jakiego typu krawędź reprezentuje ta oś, i podmienić odpowiednie symbole:

$$\begin{aligned} h_i &: (F_d, e_{h_{i,j}x}, E_b, V_e, E_a, e_{h_{i,j}x}), \\ h_j &: (F_d, e_{h_{i,j}y}, E_c, V_f, E_b, e_{h_{i,j}y}). \end{aligned}$$

Można teraz przystąpić do konstruowania topologii ścianki. Interesujące nas podciągi związane z nową ścianką to:

$$\begin{aligned} h_i &: (F_d, e_{h_{i,j}x}, E_b), \\ h_j &: (E_b, e_{h_{i,j}y}, F_d). \end{aligned}$$

Symbol  $F_d$  reprezentuje ścianę obiektu i jest zamieniany na odpowiadającą krawędź  $e_{F_d h_{i,j}}$ . Podciągi te są następnie łączone poprzez zgodne elementy w ciąg cykliczny

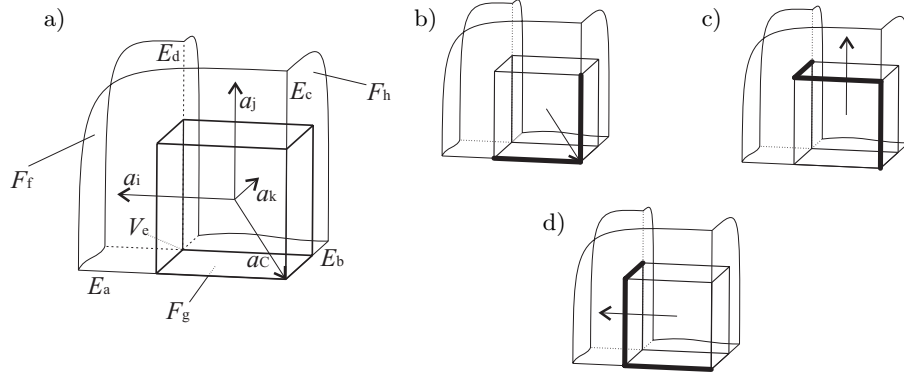
$$(e_{F_d h_{i,j}}, e_{h_{i,j}x}, e_{a_k h_{i,j}, E_b}, e_{h_{i,j}y}),$$

i po zmianie kolejności symboli otrzymujemy topologię ścianki  $h_{i,j}$ :

$$(e_{h_{i,j}y}, e_{a_k h_{i,j}, E_b}, e_{h_{i,j}x}, e_{F_d h_{i,j}}).$$

**Otrzymywanie topologii ścian typu  $f_F$**  jest bardziej skomplikowane. Niech  $F_i$  będzie symbolem, który reprezentuje ścianę obiektu. W pierwszym etapie należy z wszystkich etykiet, w których występuje  $F_i$ , wybrać podciągi 3-elementowe postaci  $(x, F_i, y)$ , gdzie  $x, y$  są dowolnymi symbolami. Symbole  $\emptyset$  są już w tym momencie rozpoznane jako krawędzie. Wybrane trójki mają różną interpretację w zależności od typu osi, z jakiej pochodzą:

- Jeżeli dany podciąg pochodzi z etykiety osi typu  $C$ , to środkowy element  $F_i$  dla tworzonej ścianki występuje w miejscu wierzchołka i musi być usunięty z podciągu (rys. 19b). Pozostałe dwa symbole reprezentują krawędzie ścianki.
- Jeżeli podciąg pochodzi z etykiety osi  $a_j$ , to  $F_i$  w podciągu reprezentuje krawędź  $e_{a_j, F_i}$ . Pozostałe dwa symbole mogą mieć różne znaczenie. Jeżeli jest to krawędź powstała przez zastąpienie symbolu  $\emptyset$ , to reprezentuje wierzchołek nowej ścianki. W tym momencie powinna pozostać w etykiecie, co pozwoli ustalić odpowiednią kolejność krawędzi. Jeżeli jest to inny symbol, to reprezentuje krawędź tworzonej ścianki (rys. 19c i d).
- Jeżeli podciąg pochodzi z etykiety osi typu  $h$ , to wszystkie elementy podciągu reprezentują wierzchołek nowej ścianki (rys. 18). Symbol  $F_i$  powinien być usunięty, jak i dwa pozostałe symbole również, lecz wcześniej będą potrzebne do ustalenia odpowiedniej kolejności krawędzi.



**Rys. 19.** Tworzenie topologii ścianki typu  $f_F$   
Objaśnienia w tekście

**Przykład 2.** Na rysunku 19a mamy następujące etykietowanie osi:

$$\begin{aligned}\gamma(a_C) &= (\mathbf{F}_f, E_a, \mathbf{F}_g, E_b, \mathbf{F}_h, E_c), \\ \gamma(a_i) &= (\mathbf{F}_g, E_a, \mathbf{F}_f, \emptyset, \mathbf{E}_d, V_e), \\ \gamma(a_j) &= (\mathbf{F}_f, E_c, \mathbf{F}_h, \emptyset, \mathbf{E}_d, \emptyset).\end{aligned}$$

Etykieta osi  $a_C$  pozwala rozpoznać krawędzie typu  $e_{FF,E}$ :

$$\begin{aligned}E_a &: e_{F_f F_g, E_a}, \\ E_b &: e_{F_g F_h, E_b}, \\ E_c &: e_{F_f F_h, E_c}.\end{aligned}$$

Po rozpoznaniu krawędzi  $e_{aa}$  związanych z symbolem  $\emptyset$  mamy następujące ciągi:

$$\begin{aligned}a_C &: (F_f, E_a, F_g, E_b, F_h, E_c), \\ a_i &: (F_g, E_a, F_f, e_{a_i a_j}, \mathbf{E}_d, V_e), \\ a_j &: (F_f, E_c, F_h, e_{a_j a_k}, \mathbf{E}_d, e_{a_i a_j}).\end{aligned}$$

Interesujące nas podciągi związane z  $F_f$  to:

$$\begin{aligned}a_C &: (E_c, F_f, E_a), \\ a_i &: (E_a, F_f, e_{a_i a_j}), \\ a_j &: (e_{a_i a_j}, F_f, E_c).\end{aligned}$$

Po zastosowaniu przekształceń związanych z symbolem  $F_f$  otrzymujemy:

$$\begin{aligned}a_C &: (E_c, E_a), \\ a_i &: (E_a, e_{a_i F_f}, e_{a_i a_j}), \\ a_j &: (e_{a_i a_j}, e_{a_j F_f}, E_c).\end{aligned}$$

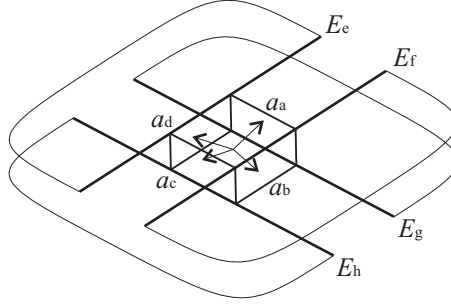
Podciągi są następnie łączone według skrajnych elementów w ciąg:

$$(E_c, E_a, e_{a_i F_f}, e_{a_i a_j}, e_{a_j F_f}).$$

Po odrzuceniu symbolu powstałego z  $\emptyset$ , zamianie symboli  $E$  na rozpoznane  $e_{FF}$  i zamianie kolejności otrzymujemy topologię opisującą ściankę  $f_{F_f}$ :

$$(e_{a_j F_f}, e_{a_i F_f}, e_{F_f F_g, E_a}, e_{F_f F_h, E_c}).$$

**Ścianki typu  $f_C$**  występują, jeżeli symbol  $\emptyset$  w etykietach osi typu  $a$  ma jako obu sąsiadów symbole reprezentujące krawędzie obiektu występujące bez podkreślenia. Symbole te występują w dwóch etykietach osi w odwrotnej kolejności.



**Rys. 20.** Tworzenie topologii ścianki typu  $f_C$

**Przykład 3.** Na rysunku 20 mamy następujące etykietowanie osi:

$$\begin{aligned}\gamma(a_a) &= (\underline{E_e}, \emptyset, \underline{E_f}, \emptyset, \underline{E_g}, \emptyset), \\ \gamma(a_b) &= (\underline{E_h}, \emptyset, \underline{E_g}, \emptyset, \underline{E_f}, \emptyset), \\ \gamma(a_c) &= (\underline{E_f}, \emptyset, \underline{E_e}, \emptyset, \underline{E_h}, \emptyset), \\ \gamma(a_d) &= (\underline{E_g}, \emptyset, \underline{E_h}, \emptyset, \underline{E_e}, \emptyset).\end{aligned}$$

Z pierwszego symbolu  $\emptyset$  etykiet osi  $a_a$  i  $a_c$  identyfikujemy ściankę górną  $C_{up}$  rozpiętą pomiędzy krawędziami  $E_e$  i  $E_f$ . Z pierwszego symbolu  $\emptyset$  etykiet osi  $a_b$  i  $a_d$  identyfikujemy ściankę dolną  $C_{dn}$  rozpiętą pomiędzy krawędziami  $E_g$  i  $E_h$ . Do pozostałych symbolów  $\emptyset$  ma zastosowanie reguła wykrywająca krawędzie typu  $e_{aa}$ . Otrzymujemy stąd następujące ciągi:

$$\begin{aligned}a_a &: (E_e, f_{C_{up}}, E_f, e_{a_a a_b}, E_g, e_{a_a a_d}), \\ a_b &: (E_h, f_{C_{dn}}, E_g, e_{a_a a_b}, \underline{E_f}, e_{a_b a_c}), \\ a_c &: (E_f, f_{C_{up}}, E_e, e_{a_c a_d}, \underline{E_h}, e_{a_b a_c}), \\ a_d &: (E_g, f_{C_{dn}}, E_h, e_{a_c a_d}, \underline{E_e}, e_{a_a a_d}).\end{aligned}$$

Kolejnym krokiem jest ustalenie, które ścianki bloku są połączone przez symbole krawędzi. Po zastosowaniu procedury odnajdywania krawędzi typu  $e_{aC,E}$  otrzymujemy następujące połączenia:

$$\begin{aligned}E_g &: e_{a_a C_{dn}}, \\ E_f &: e_{a_b C_{up}}, \\ E_h &: e_{a_c C_{dn}}, \\ E_e &: e_{a_d C_{up}}.\end{aligned}$$

Teraz można przystąpić do tworzenia topologii ścianki. Podobnie jak poprzednio należy odnaleźć podciągi  $(\alpha, f_c, \beta)$ . Dla  $f_{C_{up}}$  mamy:

$$\begin{aligned}a_a &: (E_e, f_{C_{up}}, E_f), \\ a_c &: (E_f, f_{C_{up}}, E_e).\end{aligned}$$

Następnie należy zamienić symbole krawędzi oraz ścianki:

$$(e_{a_d C_{up}}, e_{a_a C_{up}}, e_{a_b C_{up}}), \\ (e_{a_b C_{up}}, e_{a_c C_{up}}, e_{a_d C_{up}}).$$

Pozostaje konkatenacja i odwrócenie kolejności. Ostatecznie otrzymujemy topologię ścianki  $f_{C_{up}}$ :

$$(e_{a_c C_{up}}, e_{a_b C_{up}}, e_{a_a C_{up}}, e_{a_d C_{up}}).$$

## 7. Kolejne etapy generowania siatki

Tworzenie topologii bloków, które odpowiadają węzłom środkowym, nie kończy etapu dekompozycji symbolicznej. Pozostaje utworzenie topologii bloków odpowiadających osiom i powierzchniom środkowym. Pierwsze z nich są graniastosłupami [3], których podstawy są ściankami bloków utworzonych dla różnych węzłów. Kreowanie topologii bloków dla osi polega głównie na odnalezieniu ścianek będących podstawami oraz połączeniu krawędziami odpowiednich wierzchołków z obu podstaw. Dla powierzchni środkowych należy wykonać dwuwymiarową dekompozycję symboliczną. Możliwe jest wykonanie tego przy wykorzystaniu dwuwymiarowego grafu *OMG*. W wyniku dekompozycji otrzymujemy wielokąty. Są one następnie rozpinane pomiędzy ścianami obiektu zarządzającymi powierzchnią środkową, w wyniku czego otrzymujemy topologię trójwymiarowych bloków. W szczególności mogą wystąpić powierzchnie środkowe, dla których bloki są graniastosłupami o podstawie trójkąta. Topologia takiego bloku może być utworzona w prosty sposób. Należy jedynie odnaleźć boczne ścianki bloku. Są to ścianki bloków utworzonych dla osi, które ograniczają daną powierzchnię środkową.

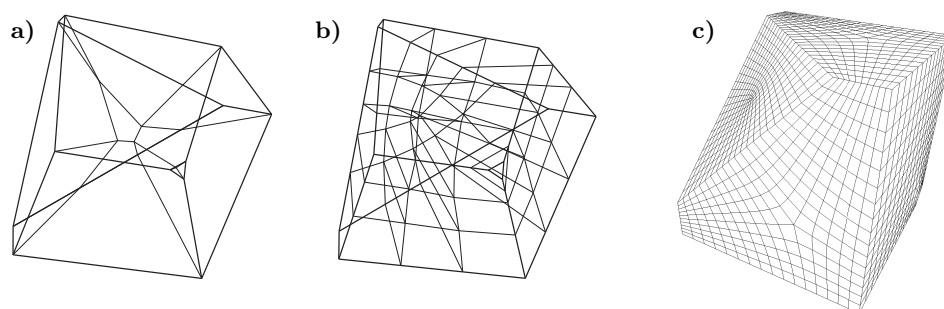
Topologia większości bloków nie jest jeszcze odpowiednia, aby możliwe było wypełnienie bloku elementami sześciociennymi. Można teraz wykonać dalszy podział topologiczny bloków metodą punktów środkowych [13]. Uzyskiwane są w ten sposób bloki sześciocienne nadające się do dalszego zagęszczania.

Kolejnym etapem jest ustalenie geometrii bloków, czyli współrzędnych wierzchołków. Dla każdego wierzchołka dysponujemy informacją o jego powiązaniu z obiektem. Są możliwe cztery przypadki. Wierzchołek bloku może leżeć na ścianie, krawędzi, wierzchołku bądź wewnątrz obiektu. W przedostatnim przypadku współrzędne wierzchołka bloku są ustalone. Dla pozostałych przypadków należy znaleźć współrzędne, uwzględniając geometryczne ograniczenia związane z przynależnością do ściany lub krawędzi obiektu. W procesie ustalania współrzędnych należy brać pod uwagę wymagania osiągnięcia maksymalnej ortogonalności pomiędzy krawędziami bloku, jak również regularności rozmieszczenia wierzchołków. Kryterium regularności powinno być powiązane z wymaganą liczbą elementów biegnących wzdłuż krawędzi bloku.

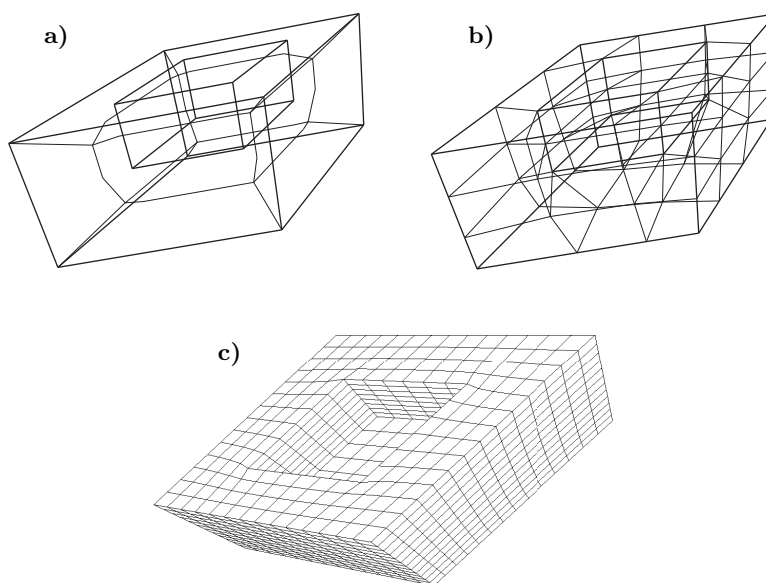
Po ustaleniu geometrii bloków dysponujemy już siatką sześciocienną o dużych elementach. Najczęściej konieczne jest zagęszczenie tej siatki. Wykonuje się również wygładzanie siatki, czyli przesuwanie jej węzłów, w celu polepszenia jakości elementów.

## 8. Przykłady siatek

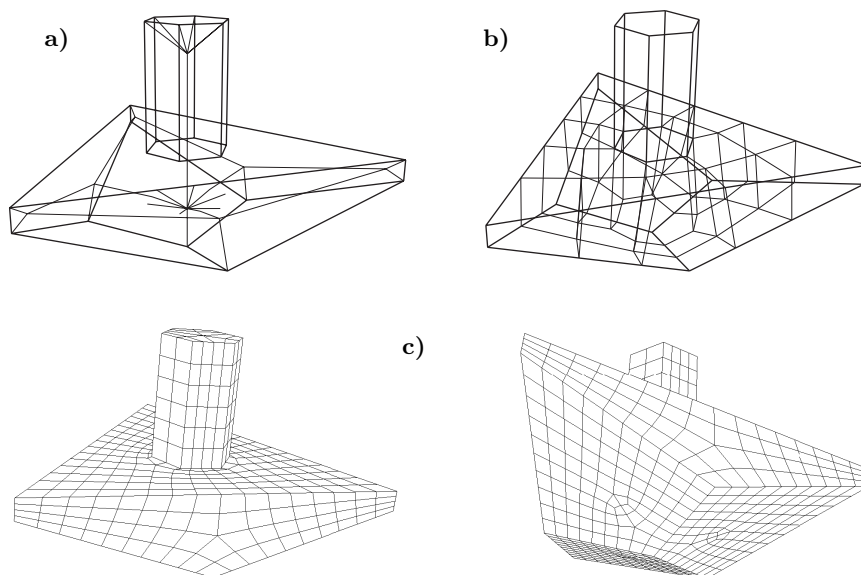
Zaproponowany algorytm został zaimplementowany. Na rysunkach 21–23 zamieszczonych jest kilka przykładów ilustrujących kolejne etapy tworzenia siatki sześciokiennej. Rysunki *a* przedstawiają osie środkowe dla obiektów. Na rysunkach *b* widzimy podział obiektów na bloki. Rysunki *c* zawierają siatkę. Siatki nie są poddane ostatecznemu wygładzaniu.



**Rys. 21.** Wypukły obiekt posiadający węzły sklasyfikowane w [3]  
Objaśnienia w tekście



**Rys. 22.** Siatka dla obiektu wklęsłego  
Objaśnienia w tekście



**Rys. 23.** Siatka dla obiektu posiadającego osie wiszące  
Objaśnienia w tekście

## 9. Podsumowanie

Zaproponowana została struktura grafowa *OMG*. Dzięki niej konstrukcja topologii bloków, które odpowiadają węzłom i osiom środkowym, jest łatwa do wykonania. Tworzone są w ten sposób bloki wypukłe zarówno dla obiektów wypukłych, jak i wklęsłych. Topologia kreowanych bloków nie jest ograniczona do zdefiniowanego zbioru. Jedną metodą tworzone są zarówno bloki proponowane w [3], jak i bloki nieuwjęte w tej klasyfikacji. Zakres możliwości generatora został poszerzony o tworzenie ścianek bloków związanych z osiami wiszącymi, jak również tworzenie ścianek uzupełniających niezwiązanych z żadną osią czy ścianą obiektu.

## Literatura

- [1] Benzley S. E., Perry E., Merkley K., Clark B., Sjaardema G.: *A comparison of all hexagonal and all tetrahedral finite element meshes for elastic and elastic-plastic analysis*. Proceedings 4th International Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories, Albuquerque, 1995, 179–192
- [2] Mitchell S. A.: *A characterization of the quadrilateral meshes of a surface which admit a compatible hexahedral mesh of the enclosed volume*. Proceedings STACS'96, Grenoble, 1996

- [3] Aprice M., Armstrong C. G.: *Hexahedral mesh generation by medial surface subdivision: Part I. Solids with convex edges*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 38, 1995, 3335–3359
- [4] Etzion M., Rappoport A.: *Computing Voronoi skeletons of a 3-D polyhedron by space subdivision*. Computational Geometry Theory and Application, vol. 21, 2002, 87–120
- [5] Blum H.: *A transformation for extracting new descriptors of shape*. In: W. Wathen-Dun, (ed.), Models for the Perception of Speech and Visual Form. MIT Press, Cambridge, MA, 1967, 362–380
- [6] Stifter S.: *The Roider method: a method for static and dynamic collision detection*. C. Hoffman (ed.) Issues in Robotics and Non-Linear Geometry, JAI Press, 1990
- [7] Blum H.: *Biological Shape and Visual Science*. Journal of Theoretical Biology, vol. 38, 1973, 205–287
- [8] Nackman L. R., Pizer S. M.: *Three-dimensional shape description using the symmetric axis transform 1: theory*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, PAMI-7, 1985
- [9] Aurenhammer F.: *Voronoi diagrams: a survey of a fundamental geometric data structure*. ACM Computing Surveys, 1991, 345–405
- [10] Okabe A., Boots, Sugihara K.: *Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*. Willey, 1992
- [11] Lavender D., Bowyer A., Davenport J., Wallis A., Woodwark J.: *Voronoi Diagrams of Set-Theoretic solid Models*. IEEE Computer Graphics and Applications, 1992, 69–77
- [12] Tam T. K. H., Armstrong C. G.: *Finite element mesh control by integer preprogramming*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 36, 1993, 2581–2605
- [13] Blacker T. D., Stephenson M. B.: *Paving: A New approach to automated quadrilateral mesh generation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 32, 1991, 811–847
- [14] Aprice M., Armstrong C. G.: *Hexahedral mesh generation by medial surface subdivision: Part II. Solids with flat and concave edges*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 40, 1997, 111–136